(1

Ad §5.15: Normale Körpererweiterungen!

Prop.: Sei $L=K(A)/K$ algebraisch, und sei $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von L. Dann sind äquivalent:

(a) Jedes irred. $f\in K[X]$, welches eine Nullstelle in L besitzt, zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren.

(b) Für jedes $a\in L$ enthält L einen Zerfällungskörper von $m_{a,K}$.

(c) " " $a\in A$ – – – – –

(d) $\forall \varphi\in \mathrm{Hom}_K(L,\overline{L})$: $\varphi(L)=L$.

(e) $\forall \varphi\in$ " : $\varphi(L)\subset L$

Beweis: (a)$\Longleftrightarrow$(b) Die normierten f in (a) sind genau die $m_{a,K}$ für alle $a\in L$. Also folgt die Äquivalenz aus der Definition von Zerfällungskörper.

(b)$\Rightarrow$(c) klar.

(c)$\Rightarrow$(d) Sei $\varphi\in\mathrm{Hom}_K(L,\overline{L})$. Sei $a\in A$. Nach (c) gilt dann $m_{a,K}(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$ für $a_i\in L$ und $a_1=a$. Für alle i gilt $m_{a,K}(\varphi(a_i))=\varphi(m_{a,K}(a_i))=\varphi(0)=0$, also $\varphi(a_i)\in\{a_1,\dots,a_n\}$. Somit induziert φ eine Abbildung $\{a_1,\dots,a_n\}\to\{a_1,\dots,a_n\}$. Da φ injektiv ist, ist diese injektiv, und folglich auch surjektiv. Es folgt einerseits:

- $\varphi(a)=\varphi(a_1)\in\{a_1,\dots,a_n\}\in L$
- $\exists i:\ a=\varphi(a_i)\in\varphi(L)$.

Variieren von a liefert also $\varphi(A)\subset L$ und $A\subset\varphi(L)$. Daraus folgt $L=K(A)\subset\varphi(L)=\varphi(K(A))=K(\varphi(A))\subset L$.

(d)$\Rightarrow$(e) klar

(e)$\Rightarrow$(b) Sei $a\in L$ und faktorisiere $m_{a,K}(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$ mit $a_i\in\overline{L}$ und $a_1=a$. Für jedes i ist dann auch $K(a_i)\subset\overline{L}$ ein Stammkörper von $m_{a,K}$, also existiert ein $\varphi\in\mathrm{Hom}_K(K(a),\overline{L})$ mit $\varphi(a)=a_i$. Da $L/K(a)$ algebraisch und $\overline{L}$ algebraisch abgeschlossen ist, besitzt φ eine Fortsetzung zu einem $\psi\in\mathrm{Hom}_K(L,\overline{L})$. Nach Voraussetzung (e) gilt nun $\psi(L)\in L$. Also ist auch $a_i=\varphi(a)=\psi(a)\in L$, und somit zerfällt $m_{a,K}$ über L in Linearfaktoren.

$$\begin{tikzcd} & \overline{L} \\ L \arrow[ur, "\varphi"] & \\ K(a) \arrow[u, dash] \arrow[uur, "a \mapsto a_i"'] & \\ K \arrow[u, dash] \arrow[uuur, dash] & \end{tikzcd}$$

qed.

Prop.: Ist L/K endlich, so ist L/K normal g.d.w. L Zerfällungskörper eines Polynoms ist.

Beweis: Ist $L=K(a_1,\dots,a_n)$ für $f(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)\in K[X]$, so ist L/K normal nach obiger Eigenschaft (b).

Ist umgekehrt L/K endlich normal, schreibe $L=K(a_1,\dots,a_n)$. Für jedes i zerfällt dann $m_{a_i,K}$ über L in Linearfaktoren, sagen wir $m_{a_i,K}(X)=\prod_{j=1}^{m_i}(X-a_{ij})$ mit $a_{ij}\in L$. Dann ist auch $L=K(a_{11},\dots,a_{n,m_n})$ mit $\prod_{i,j}(X-a_{ij})=\prod_i m_{a_i,K}(X)\in K[X]$, also ist L Zerfällungskörper dieses Polynoms über K. qed.

Prop.: Ist $L=K(a_1,\dots,a_n)/K$ endlich, so ist jeder Zerfällungskörper von $m_{a_1,K}\cdots m_{a_n,K}$ über L eine normale Hülle von L/K.

Beweis: Als Zerfällungskörper ist er normal über K. Jede darin enthaltene normale Erweiterung von K, die L enthält, muss aber auch alle Nullstellen von $m_{a_1,K}\cdots m_{a_n,K}$ enthalten. qed.

Prop.: Jede algebraische Erweiterung besitzt eine normale Hülle. Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie.

Beweis: Sei L/K algebraisch und $\bar L$ ein algebraischer Abschluss von L. Sei A die Menge aller Nullstellen in $\bar L$ aller Minimalpolynome über K von Elementen von L. Setze $\tilde L := K(A)$.

Jedes $a\in A$ ist dann Nullstelle von $m_{b,K}$ für ein $b\in L$, und $m_{b,K}$ zerfällt in Linearfaktoren über $K(A)$, und es gilt: $m_{a,K} \mid m_{b,K}$. Nach Eigenschaft (c) ist also $\tilde L/K$ normal.

Umgekehrt muss jede normale Erweiterung von K, die zwischen L und $\bar L$ liegt, die Elemente A enthalten. Also ist $\tilde L$ minimal, also eine normale Hülle.

Für eine zweite normale Hülle $\tilde L'$ wähle Einbettung $\varphi\in \mathrm{Hom}_L(\tilde L',\bar L)$. Dann muss auch $\varphi(\tilde L')$ die Elemente A enthalten $\Rightarrow \varphi(\tilde L')\supset \tilde L$.

Minimalität von $\tilde L'$ $\Rightarrow \varphi(\tilde L')=\tilde L$.

$$\begin{tikzcd} \tilde L' \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \bar L \\ & \tilde L \arrow[u] \\ & L \arrow[u] \arrow[uul, dash] \\ & K \arrow[u, dash] \end{tikzcd}$$

qed.